المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (18) 2010
ص ص [359-372]

خوارزمية مقترحة للتحقق من مراوحة مشاهدات تنمذج وفق النموذج الماركوفي مع التطبيق

أ.د.باسل يونس ذنون الخياط* هنادي داؤد سليم** مازن محمد غانم العناز**

Abstract

This paper addresses the research issue of verification of stationarity of observations modeled according to the Markovian model. A method is proposed to achieve this purpose depends mainly on certain matrices, called the matrices of relative frequencies. A simulation experiment is carried out through which to reach a practical formula to approximate the theatrical value of the threshold. The proposed method is also applied to DNA for natural human being, and shows that during this that this sequence is stationary, homogeneous in position, i.e., that their properties do not change on the position.

الملخص

تتناول هذه الورقة البحثية مسالة التحقق من مراوحة مشاهدات تنمذج وفق النموذج الماركوفي. وتقترح طريقة لتحقيق هذا الغرض تعتمد أساسا على مصفوفات معينة، أطلق عليها مصفوفات التكرارات النسبية .وتجرى تجربة محلكاة يتم من خلالها الوصول عمليا إلى صيغة نظرية تقريبية لحد العتبة.كما تطبق الطريقة المقترحة على مشاهدات الحامض النووي الرايبي منقوص الأوكسجين DNA للإنسان الطبيعي، ويتبين من خلال ذلك أن هذه المتتابعة مراوحة ومتجانسة موقعيا، أي أن خصائصها لا تتغير بتغير الموقع.

* أستاذ/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات
** مدرس مساعد/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات
تاريخ التسلم :17 /10 /2010 . . . . . تاريخ القبول : 5/ 12/ 2010

1- مقدمة:

تحتل سلاسل ماركوف مكانة مرموقة في العلوم الاحصائية لما تتمتع به من خصائص بنيوية مهمة، خاصة بتعاملها مع مفهوم الحالة. وتشمل حاليا تطبيقات سلاسل ماركوف طيفا واسعا بدأ بالتطبيقات التقليدية وانهاءا بتطبيقاتها في المعلوماتية، انظر الخياط (2011). تسمى احتمالات الانتقال من الحالة i إلى الحالة j بالاحتمالات الانتقالية Transition Probabilities ويرمز لها p_{ij}.

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للانتقالات بين الحالات بمصفوفة تسمى **المصفوفة الانتقالية** Transition Matrix ، ويرمز لها $\underline{P}$ ، إذ أن العنصر (i, j) من هذه المصفوفة يمثل الاحتمالية الانتقالية $p_{ij} = P(X_n = j / X_{n-1} = i)$. إن المصفوفة الانتقالية $\underline{P}$ هي عبارة عن **مصفوفة تصادفيه** Stochastic Matrix تحقق الشرطان الآتيان:

1-جميع عناصرها غير سالبة (لكونها احتمالات).

2-مجموع كل صف من صفوفها يساوي 1 (لان مجموع الاحتمالات الكلية يساوي 1).

لو كان فضاء الحالة بشكل $S=\{1,2,\ldots,N\}$، فان الشكل العام للمصفوفة الانتقالية ذات الخطوة الواحدة يكون كما يأتي:

$$\underline{P} = \begin{array}{c} \\ X_{n-1}=1 \\ 2 \\ \cdot \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_n=1 & 2 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \end{array}.$$

والتعاريف الآتية مأخوذة من الخياط (2011).

التعريف(1):

يقال للعملية التصادفية $\{X_n\}$ بأنها تحمل **الخاصية الماركوفية** **The Markovian Property** إذا كانت تُحقق ما يأتي:

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = a, X_{n-3} = b, \ldots, X_0 = c) = P(X_n = j / X_{n-1} = i) = p_{ij},$$

لجميع قيم n, i, j, a, b, c.

ويمكن تطوير تعريف ذاكرة Memory العملية التصادفية إلى الذاكرة ذات المرتبة m وعلى النحو الآتي.

التعريف(2):

يقال للعملية التصادفية $\{X_n\}$ بأنها **ذات ذاكرة مرتبها** m إذا كان:

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = a, X_{n-3} = b, ..., X_{n-m} = c, ...)$$
$$= P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = a, X_{n-3} = b, ..., X_{n-m} = c).$$

لجميع قيم n, i, j, a, b, c.

التعريف(3):

سلسلة ماركوف Markov Chain (أو السلسلة الماركوفية) هي عملية تصادفيه ذات فضاء حالة متقطّع وتحمل الخاصية الماركوفية.

و يتضح من التعريف السابق بان سلسلة ماركوف من المرتبة m هي عبارة عن متتابعة من الحالات التي يمر بها نظام معين، أو ظاهرة معينة، خلال الانتقال عبر المحور الزمني أو أي دليل آخر وبحيث أن معرفة حالة النظام في زمن ما لا تعتمد على جميع تاريخ النظام، بل على حالة النظام في الأزمنة السابقة فقط لغاية الزمن m من الزمن المطلوب معرفة حالته.

إن التطبيقات الشائعة للسلاسل الماركوفية تتعامل مع السلاسل الماركوفية المراوحة والتي تكون الاحتمالات الانتقالية ثابتة بتغير الدليل، إن هكذا سلاسل لا تكون موجودة دائما في التطبيقات الواقعية، فقد تتأثر السلسلة بعوامل معينة تودي إلى تغير في سلوكها على المدى البعيد. لذا نجد من المفيد إيجاد طريقة علمية للتحقق من تجانس سلوك السلسلة الماركوفية بتغير الدليل. وسوف نستعير بعض المفاهيم الأساسية ذات العلاقة بموضوع هذا البحث من موضوع المتسلسلات الزمنية.

المراوحة Stationarity:

من الفروض الأساسية التي تفترض على العمليات التصادفية من اجل تسهيل التعامل الرياضي معها هو فرض المراوحة. وباختصار يقصد بالعملية التصادفية المراوحة بانها عملية تصادفيه تبقى خصائصها الرياضية والإحصائية لا تتغير بتغير الدليل ((Priestley(1988). وبخصوص السلاسل الماركوفية، فكما هو معروف فان السلسلة الماركوفية تخصص تماما بكل من الاحتمالات الانتقالية والتوزيع الاحتمالي للحالة الابتدائية. لذا نستنتج على الفور التعريف الأتي:

يقال للسلسلة الماركوفية بانها متجانسة homogenous (او ان لها احتمالات انتقالية مراوحة Stationary transition probabilities) اذا كانت احتمالاتها الانتقالية لا تعتمد على الزمن. فلو كانت $P(x,n_0;\ S,n)$ تمثل الاحتمالية الشرطية بان تكون حالة النظام في الزمن n تعود الى المجموعة S ، معطى بان النظام في الزمن $n_0(<n)$ هو في الحالة x. فان السلسلة الماركوفية تكون مراوحة اذا كانت $P(x,n_0; S,n)$ تعتمد فقط على n وn_0 من خلال الفرق $(n\text{-}n_0)$ ((Parzen (1962). بعبارة اخرى اذا كانت $\{X_n\}$ هي عملية تصادفيه متقطعة الزمن ذات فضاء حالة معدود S. وإذا كانت لجميع الأعداد الصحيحة $n \geq 0$ ولجميع الحالات $i_0, i_1, \ldots\ldots, i_{n-1}, i, j,$

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

وكان الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة لا يعتمد على الدليل n فان العملية التصادفية $\{X_n\}$يطلق عليها سلسلة ماركوفية متجانسة ((Brémaud (1999).

3- التحقق من المراوحة:

يقال للمتسلسلة الزمنية (أو المتتابعة الزمانية، أو الإشارة Signal) بأنها **مراوِحة** Stationary إذا كانت خصائصها لا تتغير بتغير موقع الدليل ألزماني أو المكاني. بعبارة أخرى فان سلوكها يكون متماثلا (يراوح في مكانه) مهما تغير موقع الدليل. إن خاصية المراوحة، بالرغم من أهميتها واستخدامها على نطاق

واسع في العديد من المجالات، إلا انه لا توجد إلى الآن طرائق إحصائية للتحقق منها. ومن الأفكار المطروحة في مجال تحليل المتسلسلات الزمنية للتحقق من مرواحتها هي تقسيم المشاهدات الى عدد من المجاميع ثم دراسة التشابه بين عزوم هذه المجاميع. ويمكن استعارة هذه الفكرة لتطبيقها على السلاسل الماركوفية.

فالفكرة الأساسية للتحقق من مراوحة سلسلة ماركوفية تتلخص بتقسيم المشاهدات الملاحظة من السلسلة الماركوفية إلى عدد من المجاميع ثم إيجاد المصفوفة الانتقالية للمشاهدات الكلية ومقارنتها مع المصفوفة الانتقالية لكل من المجاميع، فإذا كانت الاحتمالات الانتقالية في الخلايا المتماثلة متقاربة فيما بينها، فيمكننا ان نعد ذلك دليلا على تجانس السلسلة الماركوفية ومراوحتها. والخوارزمية المقترحة الآتية تترجم ذلك.

الخوارزمية (1): التحقق من مراوحة مشاهدات تنمذج وفق النموذج الماركوفي.

الخطوة (1): جد المصفوفة الانتقالية للمشاهدات الكلية، ولتكن $\underline{P} = \{p_{ij}\}$.

الخطوة (2): اقسم المشاهدات إلى عدد من المجاميع، وليكن g ، وبحيث تضم كل مجموعة ما لا يقل عن 100 مشاهدة.

الخطوة (3): لائم نموذج ماركوفي لكل مجموعة وجد المصفوفات الانتقالية لكل منها، ولتكن هذه المصفوفات الانتقالية $\underline{P}^{(1)}, \underline{P}^{(2)}, ..., \underline{P}^{(g)}$.

الخطوة (4): احسب النسبة المئوية للفرق المطلق النسبي بين عناصر كل من المصفوفات الانتقالية $\underline{P}^{(1)}, \underline{P}^{(2)}, ..., \underline{P}^{(g)}$ من جهة، والعناصر التي تقابلها في المصفوفة الانتقالية للمشاهدات الكلية $\underline{P}$، وكما يأتي:

$$r_{ij}^{(k)} = \frac{\left|p_{ij} - p_{ij}^{(k)}\right|}{p_{ij}} \times 100;\ i,j = 1,2,...,N,\ k = 1,2,...,g \qquad (1)$$

ولنفرض أن المصفوفة التي تضم قيم $r_{ij}^{(k)}$ هي $R^{(k)}$، وسوف نطلق على هذه المصفوفة **مصفوفة الفروق المطلقة النسبية.**

الخطوة (5): حدد حد عتبة Threshold، وليكن r، وسوف نتناول في المبحث القادم مسالة اختيار حد العتبة .

الخطوة (6): إذا كانت $(1-\alpha)100\%$ من النسب المئوية للفروق النسبية التي تم إيجادها في الخطوة (4) اقل من حد العتبة r، فيمكن اعتبار أن المشاهدات مراوحة، فيما عدا ذلك تكون المشاهدات غير مراوحة بمستوى معنوية α .

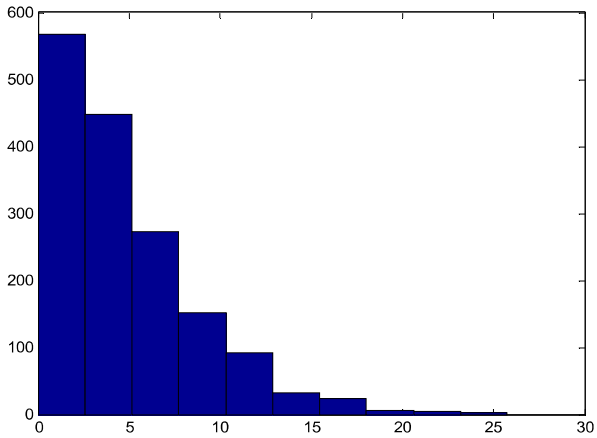
4- تجربة محاكاة:

لقد اعتمد نهج المحاكاة لغرض دراسة السلوك الاحتمالي لعناصر مصفوفة الفروق المطلقة النسبية R وعلى النحو الآتي :

أولا: لقد تم توليد مشاهدات ذات حجم 2000 من النموذج الماركوفي ذو الحالتين $S=\{1,2\}$ والمصفوفة الانتقالية :

$$P=\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}.$$

وقد قسمت المشاهدات إلى أربعة مجموعات ، حجم كل منها 500 . وبعد تطبيق الخوارزمية وحساب مصفوفة الفروق المطلقة النسبية R تم الحصول على أربعة مصفوفات للفروق المطلقة النسبية كل منها مؤلف من أربعة عناصر. أي أن عدد العناصر المطلقة النسبية في التشغيلة الواحدة هو 16 عنصر . وبإعادة هذه التجربة مئة مرة يكون عدد العناصر المطلقة النسبية هو 1600 عنصر. إن التوزيع التكراري لهذه العناصر يكون دائماً بنمط واحد: تكون ذروة التكرارات قريبة من الصفر ثم تتناقص تدريجيا كلما ابتعدنا عن نقطة الأصل. وهذا النمط يماثل تماماً نمط التوزيع الأسي. وقد تم إجراء اختبار مربع كاي لحسن المطابقة وتبين فعلاً بان التوزيع الاحتمالي للفروق المطلقة النسبية هو التوزيع الأسي. و الشكل الأتي يبين المدرج التكراري لإحدى التشغيلات.



الشكل (1): المدرج التكراري للعناصر المطلقة النسبية في اولاً.

و الجـ دول الأتـ ي يبـ ين معـ دل وتبـ اين عـ شرة مكـ ررات مـ ن التجربـ ة ذات الاعادات ألمائـ ه . كـ ذلك فقـ د تـ م حـ ساب القيمتـ ين ذواتـ ي التسلـ سل 95% و 99% مـ . ن المـ . شاهدات المولـ . دة بعـ . د ترتيبها . ا تـ . صاعديا، وسـ وف نطلـ ق علـ ى هـ اتين القيمتـ ين تـ سمية القيمتـ ين الحـ رجتين c_5 و c_1، على التوالي.

الجـ .دول(1): معـ .دل وتبـ .اين والقـ .يم الحرجـ .ة لعـ .شرة تكـ .ررات مـ .ن التجربة للنموذج الماركوفي ذو الحالتين.

التكرار	المعدل	التباين	القيمة الحرجة c_5	القيمة الحرجة c_1
1	4.7603	15.5156	12.4622	17.2773
2	4.7477	16.0359	12.6739	17.1027
3	4.8173	17.2866	13.1185	19.5977
4	4.5630	15.4172	12.9438	17.1296
5	4.6630	14.8470	12.0299	17.2168
6	4.5791	15.1956	12.2921	16.6678
7	4.7601	15.3234	12.5472	16.7891
8	4.6542	15.3975	12.7269	17.4512
9	4.4670	13.2513	11.7297	15.9288
10	4.7361	16.3379	12.7489	18.4930

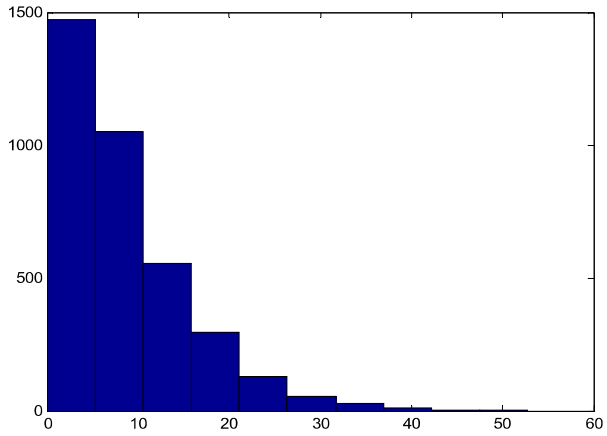
ثانيا: لقد أعيد الإجراء المذكور في أولا على النموذج الماركوفي ذو فضاء الحالة $S=\{1,2,3\}$ والمصفوفة الانتقالية :

$$P=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

والجدول الآتي يبين نتائج عشرة مكررات من التجربة والتي تم الحصول عليها بطريقة مماثلة تماما كما في أولا.

الجدول(2): معدل وتباين والقيم الحرجة لعشرة تكرارات من التجربة للنموذج الماركوفي ذو الثلاث حالات.

التكرار	المعدل	التباين	القيمة الحرجة c_5	القيمة الحرجة c_1
1	8.4524	52.3854	22.4638	32.3275
2	8.3671	49.2563	22.1386	30.0469
3	8.5917	52.5695	23.1814	31.2883
4	8.1016	48.7048	21.6790	30.5734
5	8.5642	51.8721	22.9808	32.5049
6	7.9332	46.5946	21.3726	30.3385
7	8.3223	49.9049	22.4477	32.3896
8	8.4846	52.8773	23.2604	32.3941
9	8.0946	46.6642	21.6978	30.2357
10	8.3992	49.4053	22.8107	31.0866



الشكل (2): المدرج التكراري للعناصر المطلقة النسبية في ثانياً.

ويلاحظ من الجدول السابق أن التباين في كل تكرار يساوي تقريبا مربع المعدل، وهذا يدعم الفرضية بان عناصر مصفوفة الفروق المطلقة النسبية R تتبع التوزيع الأسي.

ثالثا: لقد أعيد الإجراء المذكور في أولا على النموذج الماركوفي ذو فضاء الحالة $S=\{1,2,3,4\}$ والمصفوفة الانتقالية :

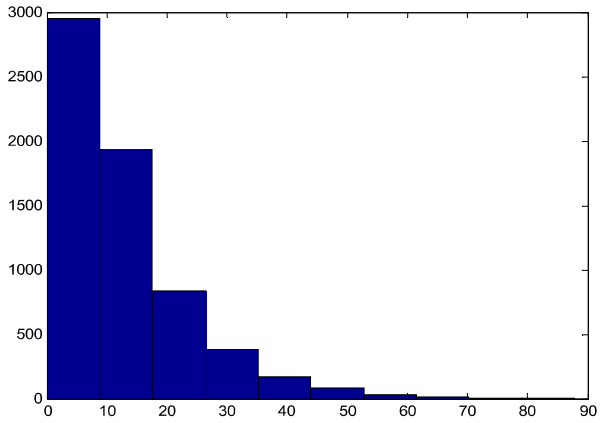
$$P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

والجدول الأتي يبين نتائج عشرة مكررات من التجربة والتي تم الحصول عليها بطريقة مماثلة تماما كما في أولا.

الجدول(3): معدل وتباين والقيم الحرجة لعشرة تكررات من التجربة للنموذج الماركوفي ذو الأربعة حالات.

التكرار	المعدل	التباين	القيمة الحرجة c_5	القيمة الحرجة c_1
1	12.4298	120.1890	34.4538	50.2554
2	12.2876	116.7847	33.2989	50.7752
3	12.4400	125.8567	34.1594	53.5147
4	12.3355	118.3490	33.3333	50.6882

50.9434	33.2031	116.5627	12.1105	5
52.5850	33.9796	124.2388	12.4215	6
50.2394	32.9835	113.4196	12.1510	7
51.2763	34.7350	122.5066	12.4126	8
49.8925	33.8418	114.1966	12.1243	9
50.8111	33.8660	120.0344	12.2443	10



الشكل (3): المدرج التكراري للعناصرالمطلقة النسبية في ثالثاً.

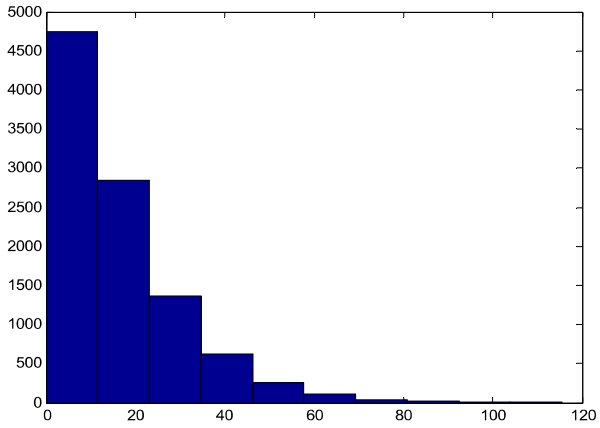
رابعاً: لقد أعيدت الإجراءات المذكورة في أولاً على النموذج الماركوفي ذو فضاء الحالة $S=\{1,2,3,4,5\}$ والمصفوفة الانتقالية :

$$P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

الجدول(4): معدل وتباين والقيم الحرجة لعشرة تكرارات من التجربة للنموذج الماركوفي ذو الخمسة حالات.

التكرار	المعدل	التباين	القيمة الحرجة c_5	القيمة الحرجة c_1
1	16.1303	197.8556	44.4516	63.2850
2	16.2452	203.3974	44.6809	65.3199
3	16.1370	204.9688	44.8276	65.6250
4	16.0811	201.5857	44.5344	64.6701

66.4080	44.8521	208.3690	16.1777	5
64.9015	45.0980	206.8258	16.3095	6
66.6667	44.9424	203.1522	15.9446	7
62.2962	44.0748	196.3687	16.0499	8
64.8352	44.6923	202.0579	16.1534	9
64.8510	44.4771	203.6191	16.1961	10



الشكل (4): المدرج التكراري للعناصر المطلقة النسبية في رابعاً.

من الدراسة الموضوعية للنتائج المبينة في الجداول الأربعة السابقة نستنتج عملياً بان معدل الفروق المطلقة النسبية (أي عناصر المصفوفة R) تساوي تقريبا 4(N-1)، كما أن عناصر المصفوفة R تتوزع أسيا. فلو اعتبرنا معدل هذا التوزيع الأسي هو 4(N-1) (وهو المعدل الذي استنتجناه عملياً من المحلكاة)، لذا سوف نقترح بان عناصر المصفوفة R تتوزع أسيا بمعدل 4(N-1).

ومن المعروف جيدا بان دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الآسي بمعدل 4(N-1) هي:

$$F(r) = 1 - e^{-r/[4(N-1)]} \qquad (1)$$

فان المنطقة الحرجة Critical Region، التي تبدأ من حد العتبة إلى المالانهاية، تكون مساحتها على النحو الأتي:

$$\alpha = e^{-r/[4(N-1)]} \qquad (2)$$

وبحل المعادلة الأخيرة بدلالة α ، نجد أن حد العتبة يمكن حسابه من العلاقة الآتية:

$$r = -4(N-1)\ln(\alpha) \qquad (3)$$

ويمكن اعتماد المعادلة الأخيرة لاختيار العتبة المناسبة r . فعند مستوى المعنوية $\alpha=0.05$ يكون حد العتبة:

$$r=11.9829\ (N-1);\ N=2,3,4,\ldots \qquad (4a)$$

وعند مستوى المعنوية $\alpha=0.01$ يكون حد العتبة:

$$r= 18.4207\ (N-1);\ N=2,3,4,\ldots \qquad (4b)$$

5- التطبيق العملي:

لقد تم تطبيق الخوارزمية المقترحة على متتابعة الحامض النووي الرايبي منقوص الأوكسجين للإنسان الطبيعي، وهذه المتتابعة مؤلفة من 16571 رمز، أي أن عدد عناصر فضاء الحالة هو N=4 ، انظر الخياط (2011) للتفاصيل. ولتطبيق هذه الخوارزمية اختيرت g=4 ، أي أن المشاهدات التي لدينا سوف نقسمها إلى أربعة مجموعات (أي أن كل مجموعة سوف تكون مؤلفة من 4142 مشاهدة). فعند مستوى المعنوية 0.05، ومن المعادلة (4a) يكون حد العتبة هو r=35.95، أما عند مستوى المعنوية 0.01، فيكون حد العتبة هو r=55.26.

إن مصفوفات الفروقات النسبية للمجموعات الأربعة لهذه المشاهدات هي كما مبينة في أدناه:

R1 =

8.4412	20.5760	5.3534	24.6099
3.0716	3.0474	17.9221	27.8921
4.2231	10.0366	0.2848	19.2544
1.8373	13.1232	11.1613	3.1304

R2 =

3.9797	11.5082	6.8269	3.0903
3.1446	1.9758	4.4969	1.7192
7.4498	6.2434	1.9515	13.5232
1.1436	2.3946	3.6465	6.8284

R3 =

3.4145	5.6770	8.9435	18.5652
4.1284	4.9167	5.5047	7.7487
3.8235	11.1783	1.9827	15.2035
4.7557	7.6153	13.8782	8.9134

R4 =

1.6286	4.8422	3.2924	10.2972
3.9513	6.0518	17.8801	19.5517
6.9349	7.5342	3.8431	15.1587
0.6904	8.2075	6.6454	4.0453

وكما هو واضح من النتائج السابقة فان جميع قيم مـ صفوفات الفروق ـات الذ سبية للمجموعات الأربعة لمشاهدات متتابعـ ـة الحـ ـامض الذ ووي الرايبـ ـي منقـ ـوص الأوكسجين اقل من حدي العتبة عند مستوى المعنوية 0.05 و 0.01 ، مما يـ شير بان هذه المتتابعة مراوحة ومتجانسة موقعيا، أي أن خصائصها لا تتغيـ ر بتغيـ ر الموقع.

6- الاستنتاجات والتوصيات:

تضمنت هذه الورقة البحثية معالجة إحـ صائية لمفهـ وم المراوحـ ـة للـ سلاسل الماركوفية، وقد اعتمدت بعض الأفكار الأساسية المطروحة في مجال تحليـ ل المتسلسلات الزمنية لغرض الوصـ ول إلـ ى "اختبـ ار " لمراوحـ ـة الـ سلاسل الماركوفية . وارتكزت الفكرة الأساسية على مصفوفات مقترحة أطلق عليهـ ا مصفوفات الفروقات النسبية. وقد تبين عمليا بان عناصر هذه المصفوفات تتبع التوزيع الأسي. وقد تم إيجاد علاقات رياضية سهلة لتحديد حـ ـد العتبـ ـة عنـ ـد مستوى معنوية معين. وبتطبيق الطريقة المقترحة على متتابعة الحامض النووي الرايبي منقوص الأوكسجين للإنسان تبين بان هذه المتتابعة مراوحة ومتجانسة موقعيا.

وبالنظر لعدم وجود دراسات في مجال اختبار مراوحة السلاسل الماركوفيـ ـة، نوصي بإجراء دراسات أخرى في هذا المجال بالاستعانة بالطرائق الإحـ صائية إضافة إلى التقنيات الحاسوبية الذكائية.

المصادر :

1- الخياط، باسل يونس ذنون (2011) " **النمذجة الماركوفية مع تطبيقات عملية**"، دار الكتب للطباعة والنشر، الموصل.

2- Priestley, M. B. (1988),"**Non-linear and Non-stationary Time**

Series Analysis", Academic Press, London.

3- Bremaud, (1999**),**" **Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues"**, Springer-Verlag.

4- Parzen E.(1962)," **Stochastic Processes"**, Holden-Day. San Francisco.